BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique
Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 4 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

--*-*

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLÈME

4MAI1NC1

Exercice 1 : 5 *points*.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

On appelle a, b, c les nombres complexes suivants : $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $c = ab$.

1) Ecrire b et c sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

2) Donner la forme algébrique des nombres complexes a et c.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

4) On considère les points B d'affixe b et C d'affixe c.

   Placer les points B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ et montrer que le triangle OBC est équilatéral.

5) On appelle D le point d'affixe $d = b+c$. Placer le point D sur la figure et montrer que le quadrilatère $OBDC$ est un losange.

Exercice 2 : 4 *points*.

I) Première partie.

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ». On admettra que 5% des appareils sont concernés par la panne « a », 3% par la panne « b » et 1% par les deux pannes.
On prélève au hasard un appareil dans la production. On note A l'événement : l'appareil présente la panne « a » et B l'événement : l'appareil présente la panne « b ».

1) Montrer que la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » ou la panne « b » est 0,07.
2) Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?
3) Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

II) Deuxième partie.

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40 € et la réparation des deux pannes coûte 100 €.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
4) Que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

Problème : 11 *points*.

I) Première partie. Le but de cette partie est de trouver des solutions de l'équation différentielle (*E*) :
$y' - 2y = -2x - 5$ où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1) Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x par $h(x) = x + 3$. Montrer que h est solution de l'équation (*E*).
2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$. On notera g la solution générale de (E_0).
3) Recherche d'une solution particulière de l'équation (*E*).
On considère la fonction φ définie pour tout réel x par $\varphi(x) = g(x) + h(x)$.
   a) Montrer que φ est solution de l'équation différentielle (*E*).
   b) Déterminer la solution particulière φ_0 de l'équation (*E*) qui vérifie $\varphi_0(0) = 2$.

II) Deuxième partie. Etude d'une fonction *f*.

On considère la fonction *f* définie pour tout nombre réel x par $f(x) = -e^{2x} + x + 3$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unités graphiques : 3cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Etude en $-\infty$.
   a) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
   c) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ.

2) Etude en $+\infty$.
   a) Justifier que pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \left(\dfrac{e^x}{x}\left(-e^x\right) + 1 + \dfrac{3}{x}\right)x$.
   b) Etudier la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

3) Etude des variations de *f*.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f. Donner la valeur exacte de son maximum.

4) Déterminer une équation de la tangente (*T*) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites Δ et (*T*) puis la courbe $\mathscr{C}$.

III) Troisième partie. Calcul d'une aire.

Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

1) Déterminer en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
2) Déterminer a pour que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.