Baccalauréat STI GC GM (AF) G. Energétique

Session 2006, centre de Nouméa

Epreuve de mathématiques

Durée de l'épreuve 4h – Coefficient 4
Calculatrice autorisée.
Deux feuilles de papier millimétré et le formulaire de mathématiques était founis.

Exercice 1 (*5 points*).

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1) Résolution d'une équation.
   a) Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation :
   $$(z-4\mathrm{i})(z^2-4z+8)=0.$$
   b) Déterminer l'écriture de chacune des solutions sous la forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un nombre réel strictement positif et θ est un nombre réel.

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a=2-2\mathrm{i}$, $b=2+2\mathrm{i}$ et $c=4\mathrm{i}$.
   a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   b) Placer le milieu M du segment $[BC]$ et calculer son affixe m sous la forme algébrique.

3) On désigne par B', C' et M' les points d'affixes respectives $b'=\frac{16}{b}$, $c'=\frac{16}{c}$ et $m'=\frac{16}{m}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes b' et c'.
   On admettra que $m'=\frac{8}{5}-\frac{24}{5}\mathrm{i}$.
   b) Placer les points B', C' et M' sur la figure.

4) Quelques configurations géométriques.
   a) Calculer les modules des nombres complexes $b'-a$, $c'-a$ et $m'-a$.
   b) En déduire que les points B', C' et M' appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre A.
   c) Tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure et démontrer que le point O appartient à ce cercle $\mathscr{C}$.
   d) Démontrer que le triangle isocèle $AB'C'$ est rectangle en A.

Exercice 2 (*5 points*).

Le dispositif de la figure A ci-dessous est constitué d'une cuve reliée à un récipient par un tuyau muni d'une vanne.

Cette vanne étant fermée, on remplit d'eau la cuve (Figure A). On ouvre ensuite la vanne et l'eau passe dans le récipient d'où elle s'écoule en pluie fine par le fond percé d'une multitude de petits orifices comme l'indique la figure B ci-dessous.

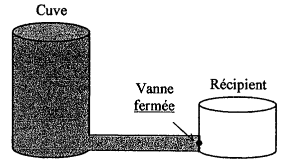

Figure A

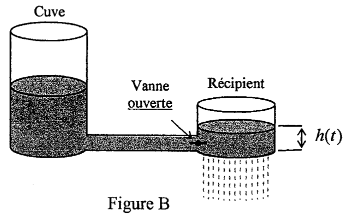

Figure B

On considère alors la fonction h qui à tout instant t, exprimé en minutes, fait correspondre la hauteur d'eau $h(t)$, exprimée en mètres, dans le récipient. On choisit l'instant où l'on ouvre la vanne comme origine des temps et, à cet instant $t=0$, la hauteur d'eau dans le récipient est nulle.

On admet que la fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle vérifie, pour tout nombre réel t de cet intervalle, la relation $h'(t)+2h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}$, où h' désigne la dérivée de la fonction h.

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t)=h(t)-\frac{1}{2}e^{-t}$.
   a) Démontrer que g est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'+2y=0$.
   b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   c) Utiliser les résultats précédents et la condition initiale $h(0)=0$ pour démontrer que, pour tout t appartenant à $[0;+\infty[$: $h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-2t})$.

2) Etude des variations de h.
   a) Déterminer la limite de h en $+\infty$.
   b) Calculer $h'(t)$ et démontrer que pour tout réel t appartenant à $[0;+\infty[$, $h'(t)$ a même signe que $2e^{-t}-1$.
   c) Étudier le signe de $2e^{-t}-1$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction h. Calculer $h(\ln 2)$.

3) En déduire la hauteur minimale en millimètres que doit avoir le récipient pour que l'eau s'en écoule entièrement par le fond, c'est-à-dire sans déborder du récipient, lorsque la vanne reste ouverte.

Problème (*10 points*).

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=4-\ln 2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Etude de la fonction f.

1) Etude des limites.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

b) Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a :

$f(x)=4-\ln 2-x\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etude du signe de f sur un intervalle.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\frac{1-x^2}{2x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

c) Calculer $f(4)$ et en déduire que la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1;4]$.

3) On désigne par A et B les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 4.

a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B.

b) Tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B puis $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie B.

On admet que, compte tenu de l'unité graphique utilisée, la longueur L, exprimée en cm, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$L=\int_1^4 2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

1) Démontrer que pour tout réel $x>0$ on a : $1+[f'(x)]^2=\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2$.

2) Calculer la valeur exacte de la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$, puis en donner une valeur approchée arrondie au mm.

Partie C.

On considère la région $\mathscr{A}$ du plan délimitée par la droite d'équation $x=1$, l'axe des abscisses et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $G(x)=x\ln x-x$.

Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

2) Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$ (On utilisera le résultat de 2°)c) de la partie A), puis en donner une valeur approchée arrondie au mm^2.