**BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE**

SESSION 2005

# MATHÉMATIQUES

## SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

**Option A** : Productique Mécanique
**Option F** : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 3 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

**1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.**

*-*-*-*

*Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME**

**5MAI1PO1**

## Exercice 1 (*5 points*)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

**I)** Résolution d'une équation.

On considère l'équation (*E*) d'inconnue $z$ : $z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0$

1) Vérifier que 2 est solution de l'équation (*E*).
2) En déduire que (*E*) peut s'écrire $(z-2)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = 0$ où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont trois nombres réels que l'on déterminera.
3) Résoudre alors l'équation (*E*) dans l'ensemble des nombres complexes.

**II)** Etude d'une configuration du plan.

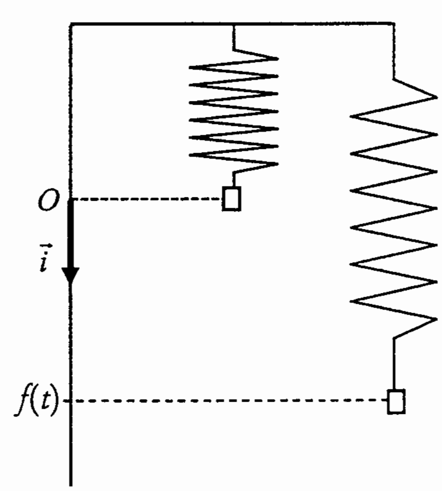
1) Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 1cm, placer les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a = 2$ et $b = 5\mathrm{i}$.
2) Soit $M$ le milieu du segment $[AB]$. Placer $M$ dans le repère et déterminer son affixe $m$.
3) Soit $P$ le point d'affixe $p = \frac{7\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Donner l'écriture algébrique de $p$ et placer $P$ dans le repère.

4) Démontrer que le triangle $BMP$ est rectangle et isocèle.

## Exercice 2 (*5 points*)

Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9$ N/m.
Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre $O$, il effectue des oscillations autour de cette position.
A chaque instant $t$, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $(O;\vec{i})$.
Les lois de la Physique montrent que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle (*E*) : $\frac{1}{9}y'' + y = 0$ .




1) Trouver la solution générale de l'équation différentielle (*E*).
2) On suppose qu'à l'instant $t=0$, le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0{,}5\,\mathrm{m}$ et a une vitesse initiale $f'(0) = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$.

   Montrer que la fonction $f$ est définie par :

   $$f(t) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \sin 3t).$$

3) Vérifier que, pour tout nombre réel $t$ :

   $$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

4) Résoudre l'équation $f(t) = 0$ dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.
5) A partir de l'instant $t$=0, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (On donnera la réponse arrondie au millième de seconde.)

**5MAI1PO1**

## Problème (*10 points*)

**Partie A.** Préliminaires.

On appelle $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels qu'on se propose de déterminer.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2cm.

1) Sachant que $\mathscr{C}$ passe par le point $A$ de coordonnées (0 ;2) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-x$, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2) En déduire que $a=1$ et que $b=2$.

**Partie B**. Etude de la fonction $f$.

1) Etude des limites.
   a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) En déduire la présence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.

2) Etude des variations de $f$.
   a) Déterminer la dérivée $f'$ de $f$, puis étudier son signe.
   b) Dresser le tableau de variations de $f$.

3) Etude d'un problème de tangente.
   a) Déterminer une équation de la droite $(T)$, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$.
   b) Factoriser l'expression $f(x)-x\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2$ et en déduire son signe.
   c) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $(T)$.

4) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les tangentes et asymptote connues, puis la courbe $\mathscr{C}$.

**Partie C.** Un calcul de volume.

Soit $\mathscr{S}$ le solide obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O;\vec{i})$, sur l'intervalle [0 ;3].
On se propose de calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{S}$.
On rappelle que $\mathscr{V}=\int_0^3 \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ en unités de volume.

1) Soient $g$ et $G$ les fonctions définies pour tout nombre réel $x$ par :

$$g(x)=(x+2)^2\mathrm{e}^{-2x} \text{ et } G(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$$

   Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\mathscr{V}$ en $\mathrm{cm}^3$ (On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur arrondie au $\mathrm{mm}^3$).