BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique

Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME

Exercice 1 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par : $P(z)=z^3-7z^2+20z-24$.
   a) Vérifier que $P(3)=0$.
   b) Déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z)=(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)$.
   c) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives $a=3$, $b=2+2\mathrm{i}$ et $c=2-2\mathrm{i}$.
   a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
   b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe b.
   c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe c.
   d) Démontrer que le triangle OBC est rectangle et isocèle.

3) On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z-3|=\sqrt{5}$.
   a) Montrer que les points B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.
   b) Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ et représenter cet ensemble sur le dessin.

Exercice 2 (*4 points*)

On s'intéresse au jeu suivant :
Une urne (urne 1) contient trois boules portant les numéros 0 , 5 et 10.
Une deuxième urne (urne 2) contient trois boules : une blanche (B), une jaune (J) et une rouge (R).
Le joueur tire successivement et au hasard une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2.

Un résultat possible est par exemple :
« la boule 1 porte le n° 5 et la boule 2 est jaune » que l'on codera (5 ; J).

1) Dresser la liste de tous les résultats possibles.

Les gains ou les pertes associés à un résultat sont définis par les règles suivantes :

- le joueur, pour pouvoir jouer, mise 5 € ;
- suite au résultat obtenu à l'issue des deux tirages il gagne :
  - le montant inscrit sur la première boule multiplié par 0 si la deuxième boule est blanche ;
  - le montant inscrit sur la première boule multiplié par 1 si la deuxième boule est jaune ;
  - le montant inscrit sur la première boule multiplié par 3 si la deuxième boule est rouge.

Le « gain réel » du joueur est donc la somme gagnée lors du jeu diminuée de la mise initiale.
Par exemple le gain réel associé au résultat (5 ; R) est $5\times3-5=10$ euros.

On note X la variable aléatoire qui à tout résultat associe le gain réel du joueur.

2) Quels sont les différents « gains réels » possibles du joueur ?

3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

5) S'il effectue un très grand nombre de parties, un joueur va plutôt :

- **réponse A** : être ruiné ?
- **réponse B** : devenir riche ?
- **réponse C** : ni l'un ni l'autre ?

Quelle est la bonne réponse ? Justifier.

Problème (*11 points*)

Partie A : Étude sommaire d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $g(x) = e^{x^3-x-5}$.
La courbe représentative de la fonction g est notée $\mathscr{C}$ et est représentée sur la feuille annexe.
Le dessin suggère que g est croissante sur **R**. On se propose dans cette partie de confirmer ou d'infirmer cette impression.

1) Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
2) Étudier selon les valeurs du nombre réel x le signe de $P(x) = 3x^2 - 1$.
3) Justifier que $g'(x)$ et $P(x)$ sont de même signe pour tout nombre réel x.
4) En déduire le tableau de variation de g. (L'étude des limites n'est pas demandée.)
5) Que penser des variations de g suggérées par le dessin ?

Partie B : Étude de quelques propriétés d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x\ln x + \frac{1}{3}x + 1$.

La courbe représentative de f est notée Γ, cette courbe est représentée sur la feuille annexe.

1) Étude des variations de f
   a) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = -\ln x - \frac{2}{3}$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'inéquation $f'(x) > 0$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (On ne demande pas de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.)

2) Calcul d'une aire
   a) Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = 2$, l'axe des abscisses, et la courbe Γ.
   b) On note H la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $H(x) = x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$.

      Déterminer $H'(x)$ et en déduire une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) Calculer l'aire de la partie du plan hachurée, exprimée en unité d'aire.

Partie C : Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[1, 2]$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1, 2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1, 2]$, $h'(x) > 0$.
2) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1, 2]$.
3) Donner la valeur approchée arrondie au centième de cette solution.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie