BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 4 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME

Exercice 1 : (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Soit (E) l'équation de la variable complexe z : $z^2-4z+8=0$.

   Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble **C** des nombres complexes.

On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :

$$a=2+2\text{i}\,,\ b=1+\text{i}\sqrt{3},\ c=2-2\text{i}\,,\ d=3-\text{i}\sqrt{3} \text{ et } k=2.$$

2) Construction du quadrilatère $ABCD$.
   a) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.
   b) Démontrer que le point K est le milieu du segment $[AC]$ et le milieu du segment $[BD]$.
   c) Placer les points A, C et K, puis construire les points B et D.

3) Nature du quadrilatère $ABCD$.
   a) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 2 : (*4 points*)

Une urne contient 100 boules. Chacune de ces boules porte l'un des numéros 1, 2, 3, 4, ou 5.
La répartition des boules suivant leur numéro est donnée par le tableau ci-dessous :

Numéro inscrit sur la boule	1	2	3	4	5
Nombre de boules	15	25	15	35	10

Un joueur tire au hasard une boule dans cette urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1) Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq 5$, on note p_n la probabilité de tirer une boule numérotée n.
Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

2) On considère les événements suivants :
   - A : « La boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à 3 » ;
   - B : « La boule tirée porte un numéro pair ».

   Déterminer les probabilités des événements $A, B, A \cap B$ et $A \cup B$.

3) Un jeu est défini de la façon suivante : un joueur mise 6€ puis il tire une boule de l'urne.
   - Si le numéro de la boule est impair il reçoit une somme de 11€ ;
   - si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

   On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain (éventuellement négatif) du joueur.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   c) On modifie la règle du jeu, la mise reste identique.
      - Si le numéro de la boule tirée est impair il reçoit la somme de a euros ;
      - si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

   Déterminer la valeur du nombre a pour que le jeu soit équitable.

Problème : (*11 points*)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-2x+4$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'unité graphique est 2 cm sur chacun des axes.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-\ln x-x^2$.

1) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (les limites ne sont pas demandées).

2) Étude du signe de g.
   a) Calculer $g(1)$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1) Étude des limites
   a) Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on déduire graphiquement pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Étude d'une asymptote
   a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-2x+4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   b) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3) On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, puis démontrer que : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4) Démontrer qu'il existe une tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

5) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1) Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1,2]$.

2) On note F la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $F(x)=(\ln x)^2-x^2+4x$.
   a) Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   b) On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.
   Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner la valeur arrondie au mm^2.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B, STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

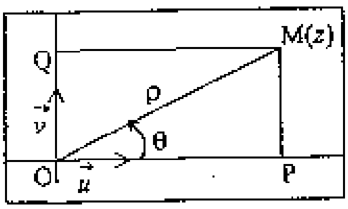
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \mathfrak{Re}(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \mathfrak{Im}(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

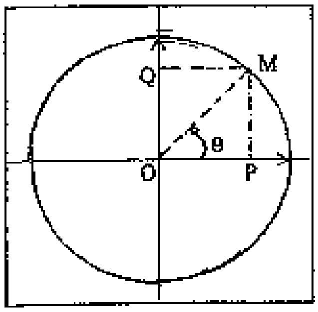
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées.

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Equations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$