B A C C A L A U R É A T   T E C H N O L O G I Q U E

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 4**

Ce sujet comporte 4 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME

Exercice 1 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2+4z+16=0$.

2) On note A, B, C, D et E les points du plan d'affixes respectives :

$$a=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\, b=\overline{a}\,;\, c=7+\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\, d=7+5\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\, e=-\frac{1}{2}a$$

a) Démontrer que $b-a=c-d$; en déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
b) Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b et e.
c) Démontrer l'égalité : $e-c=\dfrac{2}{3}(b-c)$. En déduire que les points B, C et E sont alignés.

3) Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et E dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, puis terminer la construction du quadrilatère $ABCD$ en laissant apparents les traits de construction.

4) On note F le point d'affixe : $f=-2-6\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Démontrer que le point B est le milieu du segment $[AF]$.
En déduire le centre de gravité du triangle ACF.

Exercice 2 (*4 points*)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, où y est une fonction inconnue de la variable x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

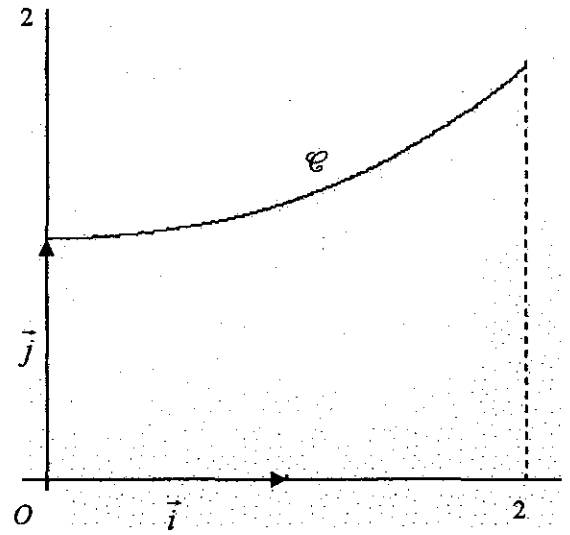
1) Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{2}y = 0$.

2) On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$.

Vérifier que f est solution de l'équation (E).

3) On a dessiné ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f précédemment définie, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.

On note $\mathscr{K}$ le solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.



a) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$, et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$H(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}(x-2)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur exacte du volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{K}$, exprimée en unités de volume.

(On rappelle que $\mathscr{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \, dx$.)

Problème (*11 points*)

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unités graphiques : 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnée.)

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, et de calculer une aire.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) Etude du comportement asymptotique de la fonction f.

1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$.

a) Vérifier que, pour tout réel x non nul appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$: $h(x)=\dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}$.

b) En déduire la limite de h en $+\infty$.

2) Mise en évidence d'une asymptote oblique.

a) Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$: $f(x)=x-2+h(x)$, où h est la fonction définie dans la question précédente.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (Δ), d'équation : $y=x-2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (Δ).

3) Déterminer la limite de f en -1 et en déduire que $\mathscr{C}$ a une asymptote (Δ') dont on donnera une équation.

II) Etude des variations de f et tracé de $\mathscr{C}$.

1) Montrer que le point O appartient à $\mathscr{C}$.

2) Montrer que, pour tout réel x de appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

3) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et les deux asymptotes (Δ) et (Δ') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

III) Calcul d'aire.

1) Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $H(x)=\dfrac{1}{x+1}+3\ln(x+1)$.

Montrer que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2) On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par $\mathscr{C}$, (Δ), et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

a) Hachurer le domaine $\mathscr{S}$ sur le dessin.

b) Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{S}$.

c) En déduire l'aire en cm^2, arrondie au mm^2, du domaine $\mathscr{S}$.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIES : STI (toutes spécialités), F10B
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

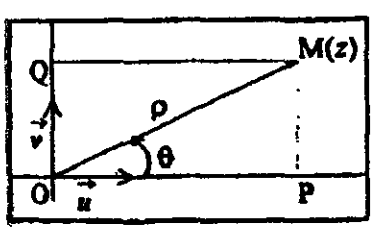
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

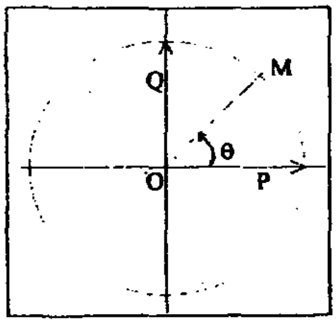
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUE

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$, $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \dfrac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\, ln\, x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\, x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$