

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique

Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 3 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

*_*_*_*

*Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des
raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES
ET LE PROBLEME**

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

a) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

b) On note z_1 la solution de l'équation E dont la partie imaginaire est positive et on note z_3 le nombre complexe défini par $z_3 = \frac{1}{8}(-z_1^2 - 25 + 16i)$. Démontrer que $z_3 = -2 - 3i$.

2) On note A, B, C et K les points du plan d'affixes respectives :

$$a = 4 + 5i, b = -3 + 4i, c = -2 - 3i \text{ et } k = 1 + i.$$

a) Placer les points A, B, C et K dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Démontrer que K est le milieu du segment $[AC]$.

c) Calculer $|a - k|$ et $|b - k|$ puis en déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit D le symétrique de B par rapport à K ; on note d l'affixe du point D .

a) Déterminer d et placer le point D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Exercice 2 : (4 points)

On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

1) Résoudre l'équation différentielle (E) .

2) On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = 1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.$$

Déterminer l'expression de la fonction f .

3) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4) Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Problème : (11 points)

On considère la fonction f définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $f(x) = e^{-2x} + 4e^{-x} + 6x + 1$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2) Démontrer que $f(x) = e^{-x}(e^{-x} + 4 + 6xe^x + e^x)$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
- 3) On note h la fonction définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $h(x) = f(x) - (6x + 1)$. Déterminer la limite de h en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
- 4) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = 6x + 1$.

Partie B : Étude des variations de la fonction f

- 1) Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout nombre réel x par :
$$f'(x) = -2(e^{-x} + 3)(e^{-x} - 1).$$
- 2) Résoudre dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels, l'inéquation $e^{-x} - 1 \geq 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur \mathbf{R} .
- 3) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4) Construire la droite \mathcal{D} puis la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Calcul d'aire

m étant un nombre réel strictement positif, on note $A(m)$ l'aire, en unités d'aire, comprise entre la droite \mathcal{D} , la courbe \mathcal{C} , les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

- 1) Exprimer $A(m)$ en fonction de m .
- 2) Calculer $A(1)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.
- 3) Résoudre dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels, l'équation $-4e^{-2x} - 32e^{-x} + 17 = 0$ (on pourra poser $X = e^{-x}$).
- 4) Déterminer le réel $m > 0$, tel que $A(m) = \frac{19}{8}$.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

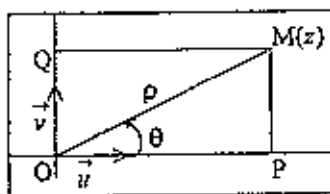
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x \vec{u} + y \vec{v} \\ \overline{OP} &= x = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta \\ \overline{OQ} &= y = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta \\ OM &= \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} ; \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbf{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(variables sur \mathbf{C} et donc sur \mathbf{R})

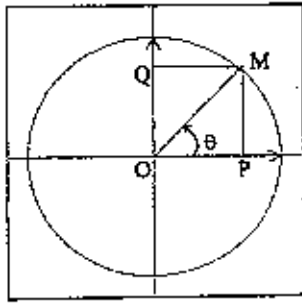
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) ; a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[,$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in]0, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2. Suites (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty; \quad \text{si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. **DÉRIVÉES ET PRIMITIVES** (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. **Dérivées et primitives des fonctions usuelles**

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. **Opérations sur les dérivées**

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(ln u)' = \frac{u'}{u}, u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. **CALCUL INTÉGRAL**

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

$$\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

E. **ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

Equations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$