Bac 2007

Terminale sciences et technologies industrielles

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Génie Mécanique Option A : Productique Mécanique
Génie Mécanique Option B : Microtechniques
Génie Énergétique
Génie Civil

Mathématiques

vendredi 15 juin 2007[1]

Durée : 4 heures | Cœfficient : 4

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques et deux feuilles de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.

[1] sujet rédigé sous LaTeX 2_ε par V. Cellier.

Exercice 1 (*5 points*)

[1 pt] 1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

2. Le plan est rapporté au repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

[1 pt] a) Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B.

[0,5 pt] b) En déduire une construction des points A et B dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

[1 pt] c) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

[0,5 pt] d) Déterminer la nature du triangle AOB.

[1 pt] e) Soit I le point d'affixe $z_I = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

Exercice 2 (*4 points*)

Soit l'équation différentielle (E) :$\dfrac{1}{4}y'' + 9y = 0$, où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

[1 pt] 1. Résoudre l'équation différentielle (E).

[1 pt] 2. Trouver la fonction f, solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :

$$f(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \text{ et } f'(\frac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3}.$$

[0,75 pt] 3. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \cos\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

[0,75 pt] b) En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, de l'équation $f(x) = 0$.

[0,5 pt] 4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{36}; \dfrac{\pi}{36}\right]$.

Problème (*11 points*)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x) = 2e^{-2x} - 8e^{-x} - 4x + 6$.

[0,5 pt] 1. Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que, pour tout nombre réel $x, g'(x) = -4(e^{-x} - 1)^2$.

[0,5 pt] 2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. On ne donnera pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

[0,5 pt] 3. a) Calculer $g(0)$.

[0,5 pt] b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-2x} - 8e^{-x} + 6$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

[1 pt] 1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

[0,5 pt] b) Donner l'interprétation graphique des solutions trouvées à la question précédente.

[0,5 pt] 2. a) Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$. On donnera une équation de $\mathscr{D}$.

[0,5 pt] b) Vérifier que, pour tout nombre réel $x, f(x) = e^{-2x}(2 - 8e^{x} + 6e^{2x})$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

[1 pt] 3. a) Déterminer la dérivée f' de f. Montrer que, pour tout nombre réel $x, f'(x)$ est du même signe que $(-e^{-x} + 2)$.

[1 pt] b) Dresser le tableau de variation de f. On précisera la valeur exacte de $f(-\ln 2)$.

[0,5 pt] c) Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

[0,5 pt] d) En utilisant les résultats de la partie A, étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.

[1,5 pt] e) Tracer les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : primitive et calcul d'aire

[0,5 pt] 1. Déterminer une primitive F de la fonction f.

[0,5 pt] 2. Hachurer la partie $\mathscr{E}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, et les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$.

[1 pt] 3. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$; en donner une valeur approchée au mm^2 près par défaut.