SESSION 2004

SUJET SORTI

MATHEMATIQUES

Série : Sciences et Technologies de Laboratoire

Spécialité : Chimie de Laboratoire et de Procédés Industriels

----

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, fourni avec le sujet, est autorisé.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Une partie de dé est organisée selon les règles suivantes :
on mise 2 € puis on lance un dé parfaitement équilibré ; pour la sortie du 6 on reçoit 6 € ; pour la sortie du 5 on reçoit 2 € ; pour la sortie du 4 on reçoit 1 € et dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Établir la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$.

2. Un joueur se présente : il a en poche 2,50 € .
   a. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue d'une partie ?
   b. Déterminer la probabilité qu'il puisse jouer deux parties ?
   c. On suppose qu'il gagne assez à la première partie pour pouvoir jouer une deuxième partie. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue des deux parties ?

EXERCICE 2 ***(5 points)***

1. Résoudre le système suivant d'inconnues complexes z et z' :

$$\begin{cases} z + \mathrm{i}z' = -1 \\ z - z' = 2 + \mathrm{i} \end{cases}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.
   a. Placer dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_A = -1$, $z_B = 2\mathrm{i}$ et $z_C = -2 + \mathrm{i}$
   b. Calculer les modules des nombres complexes : $z_B - z_C$ et $z_B - z_A$.
   Donner une interprétation géométrique de ces résultats.
   c. On note I le milieu du segment $[AC]$. Préciser l'affixe du point I puis calculer la distance BI.
   d. Déterminer l'aire en cm^2 du triangle ABC.

PROBLÈME ***(10 points)***

Partie 1

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = (x^2 - 5x + 7)\mathrm{e}^x$.
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. On rappelle que : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$ pour tout n entier naturel.

   En remarquant que $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x + 7\mathrm{e}^x$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
   En déduire que C admet une asymptote dont on donnera une équation.
2.
   a. Démontrer que pour tout x de **R** on a : $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x$.
   b. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.
   Dresser le tableau de variations de f (on donnera les valeurs exactes de $f(1)$ et de $f(2)$).
3.
   a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
   b. Que peut-on dire de la tangente à C au point d'abscisse 1 ? et au point d'abscisse 2 ?
4. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2	2,5
$f(x)$						

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut.

5. Construire la droite T et la courbe C.

Partie 2

1.

a. Hachurer sur le dessin la partie du plan comprise entre la courbe C, la droite d'équation $x = 1$ et les deux axes du repère. On appelle A son aire, en cm^2.

b. En utilisant la **partie 1** montrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 1] on a :

$$7 \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}$$

c. En déduire l'encadrement suivant : $7 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 3\mathrm{e}$.

d. En utilisant l'encadrement ci-dessus justifier que l'aire A est comprise entre 28 et 33 cm^2.

2.

a. Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = (x^2 - 7x + 14)\mathrm{e}^x$.
Montrer que g est une primitive de f sur **R**.

b. En déduire la valeur exacte de A puis la valeur arrondie à l'unité près.