BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Session 2007

SUJET SORTI

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE

CHIMIE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

Durée de l'épreuve : 3 heures coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Une feuille de papier millimétré, réservée au problème, sera distribuée au candidat.

Un formulaire de mathématiques sera distribué au candidat.

Le sujet comporte 4 pages, dont l'annexe, page 4 est à rendre avec la copie.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (*4 points*)

1 - Résoudre l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' - 2y = 0.$$

2 - On note f la solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $f(0) = 1$ et g la solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $g(0) = 2$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{2x}$.

b) Exprimer g (x) en fonction de x.

3 - Sur l'annexe, à rendre avec la copie, page 4, figurent les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit Δ la droite d'équation $y = 2$.
Cette droite coupe respectivement les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ aux points A et B.

a) Tracer la droite Δ et placer les points A et B.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ et celui de la droite $\mathscr{T}'$ tangente en B à la courbe $\mathscr{C}'$.

c) Quelle remarque peut-on faire sur les deux tangentes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$?

EXERCICE 2 (*6 points*)

Une urne contient quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4.
Une expérience aléatoire se déroule de la manière suivante :
On tire au hasard une première boule de l'urne et on note son numéro. Après avoir remis cette boule dans l'urne, on en tire au hasard une seconde dont on note aussi le numéro.
À l'issue de cette expérience, on obtient un couple de nombres (on rappelle que, par exemple, le couple (2 , 3) est différent du couple (3 , 2)).

1 - À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, établir la liste des 16 couples possibles.

2 - Dans cette question, on donnera les probabilités sous la forme de fractions de dénominateur 16.

a) On note A l'événement « obtenir un couple de nombres pairs ».
Montrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{4}{16}$.

b) On note B l'événement « obtenir un couple de nombres impairs ».
Calculer la probabilité de l'événement B.

c) On note C l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente ».
Calculer la probabilité de l'événement C.

3 - On organise un jeu.
Un joueur mise 2 € et réalise ensuite l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

- Si l'événement A est réalisé, le joueur reçoit 8 € de l'organisateur du jeu ;
- Si l'événement B est réalisé, le joueur reçoit 4 € de l'organisateur du jeu ;
- Si l'événement C est réalisé, le joueur donne 4 € à l'organisateur du jeu.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, s'il obtient le couple (2 , 2), son gain est 6 €.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

d) On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.
Quelle aurait dû être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?

PROBLÈME (*10 points*)

Partie I : *Étude de la fonction f.*

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)\,e^x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1 - **a)** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$).
En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.

2 - On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (2x^2 - x - 3)\,e^x$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).

3 - **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α.

4 - Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et placer son point A d'abscisse α.

Partie II : *Calcul d'une intégrale.*

1 - On désigne par F la fonction définie sur **R** par $F(x) = (2x^2 - 9x + 11)\,e^x$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur **R**.

2 - Calculer l'intégrale $I = \int_{0,5}^{2} f(x)\,dx$.

3 - Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

ANNEXE à rendre avec la copie