BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Session 2008

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE

CHIMIE DE LABORATOIRE ET
DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

Durée de l'épreuve : 3 heures coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées aux candidats.

Un formulaire de mathématiques sera distribué au candidat.

Le sujet comporte 3 pages.

SUJET SORTI

Exercice 1 (4 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

2) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad z_B = 2\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad z_C = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

a) Écrire les nombres complexes z_A, z_B et z_C sous forme algébrique.
b) Placer les points A, B et C sur une figure.
c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Quelle est la nature du triangle AOC ?

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, l'unité de temps est l'heure et l'unité de température est le degré Celsius.
À l'instant $t = 0$, une tarte sort d'un four, à la température de 220°. Elle est alors placée dans une salle à 20°.
On désigne par $f(t)$ la température de la tarte à l'instant t. On définit ainsi une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On suppose que la vitesse $f'(t)$ de refroidissement de la tarte est proportionnelle à la différence entre la température de la tarte et celle de la salle, c'est-à-dire $f(t) - 20$.
On admet donc qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel positif t, $f'(t) = \lambda[f(t) - 20]$.

1) On pose : $y(t) = f(t) - 20$.
a) Montrer que la fonction y ainsi définie est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
b) Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
c) En déduire que, pour tout nombre réel positif t, $f(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t} + 20$, où C est un nombre réel.
d) En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer C.

2)
a) Au bout d'un quart d'heure (c'est-à-dire pour $t = \frac{1}{4}$), la température de la tarte est égale à 60°.
Montrer que, pour tout nombre réel positif t, $f(t) = 200\,\mathrm{e}^{(-4\ln 5)t} + 20$.
b) Déterminer la température de la tarte au bout d'une demi-heure.

Problème (11 points)

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 10\,e^{x} + 16$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$
(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2)

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (e^{x}-2)(e^{x}-8)$.
b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2\,e^{x}(e^{x}-5)$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

5)

a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
b) Construire la droite $\mathscr{T}$ puis, sur le même graphique, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3\,;\,2{,}2]$.
c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y = 16$. On mettra en évidence le point B de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\ln 5$, ainsi que la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

6)

a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ln 2]$.
b) On considère le domaine plan $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.
c) Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ au centième par défaut.