BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2010

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE**
Spécialité : **CHIMIE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Un formulaire de mathématiques est distribué aux candidats

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 *points*)

1) Résoudre l'équation différentielle $y''+25y=0$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels.

2) Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les conditions suivantes : $f(\pi)=-\sqrt{3}$ et $f'(\pi)=5$.

3) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $f(t)=2\cos(5t+\frac{\pi}{6})$.

4)
   a) Résoudre dans **R** l'équation $2\cos x = 1$.
   b) En déduire les solutions dans **R** de l'équation $f(t)=1$.

Exercice 2 (5 *points*)

Un conteneur contient 100 flacons de même capacité, remplis d'une solution liquide contenant un produit P et dosée de la manière suivante :

5 flacons sont remplis d'une solution dosée à 10% du produit P ;
30 flacons sont remplis d'une solution dosée à 20% du produit P ;
40 flacons sont remplis d'une solution dosée à 30% du produit P ;
20 flacons sont remplis d'une solution dosée à 40% du produit P ;
5 flacons sont remplis d'une solution dosée à 50% du produit P.

On tire au hasard un flacon du conteneur. On admet que tous les flacons ont la même probabilité d'être tirés.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'un flacon, associe le nombre exprimant le pourcentage de la solution contenue dans ce flacon. Ainsi, si on tire l'un des cinq flacons dont le contenu est dosé à 10%, X prend la valeur 10.

1) Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

3) Déterminer le dosage de la solution obtenue en mélangeant le contenu des 100 flacons dans un même récipient.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Le produit P étant toujours dosé soit à 10%, soit à 20%, soit à 30%, soit à 40%, soit à 50%, on souhaite obtenir $E(X) = 29,2$ en modifiant le dosage de la solution contenue dans un seul des flacons. Proposer une manière de parvenir à ce résultat.

Problème (11 *points*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 (on rappelle que la limite de $x\ln x$ lorsque x tend vers 0 est 0).

2) Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$,

$f(x)=x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+1$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3) On désigne par f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$,

$f'(x)=2x(1-\ln x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Donner le tableau de variation de la fonction f. Indiquer les limites en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur de l'extremum de la fonction f.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $[4\ ,\ 5]$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

6) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).
Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (faire figurer sur le tracé le point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse α).

7) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{11}{18}x^3-\dfrac{1}{3}x^3\ln x+x$.
Vérifier que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

8) On considère le domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=4$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.
Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ au centième.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités),
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

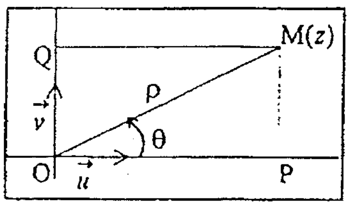
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho \cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho \sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, \ n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

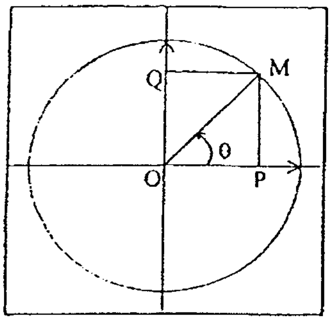
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \ ; \ a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

B. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. *Fonctions*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x + B\sin\omega x$