BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2009

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures | Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 *(8 points)*

Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question une seule des propositions est exacte, aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'ajoute ni ne retire aucun point.

On inscrira sur la copie le numéro et les lettres de la réponse choisie

A Dans une entreprise de 200 employés, on dénombre 108 femmes, 100 cadres et 25 femmes cadres. On choisit, au hasard, une personne de cette entreprise. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

1 La probabilité que ce soit une femme est :

a. $\dfrac{27}{50}$ **b.** $\dfrac{1}{108}$ **c.** environ 0,009

2 La probabilité que ce soit une femme ou un cadre est :

a. $\dfrac{208}{200}$ **b.** 0,915 **c.** 0,165

3 La probabilité que ce soit un homme est :

a. 0,46 **b.** $\dfrac{108}{200}$ **c.** 0,54

4 **On choisit maintenant une femme.** La probabilité qu'elle ne soit pas cadre est :

a. $\dfrac{83}{108}$ **b.** $\dfrac{1}{83}$ **c.** 0,415

B Quelle est la limite en $+\infty$ des fonctions proposées ?

1 $f(x) = -2 + 4e^{2x}$ **a.** -2 **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$

2 $g(x) = x\left(3 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ **a.** $+\infty$ **b.** $-\infty$ **c.** 3

C Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 0{,}5$.

1 Le terme u_3 est : **a.** $\dfrac{3}{8}$ **b.** $\dfrac{27}{8}$ **c.** 4,5

2 La somme $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ est :

a. $\dfrac{45}{8}$ **b.** $\dfrac{15}{8}$ **c.** $\dfrac{7}{4}$

EXERCICE 2(*12 points*)

Deux étudiants ont pesé la masse d'une culture de levure de boulangerie (*saccharomyces cerevisiae*) et ont noté la mesure m_i de cette masse aux instants t_i.

L'expérience a duré 8 heures. Ils ont obtenu les résultats suivants :

t_i (en heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i (en grammes)	0,60	0,69	0,75	0,88	0,99	1,06	1,21	1,43	1,57

Les deux étudiants cherchent à modéliser la croissance de cette levure, c'est-à-dire à exprimer l'évolution de m en fonction de t, au moyen d'une fonction dont la courbe est "voisine" du nuage de points obtenu expérimentalement et qui est représenté sur le graphique donné en annexe. Celui-ci sera complété dans la partie B et rendu avec la copie.

Dans toute la suite les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A

Le premier étudiant pense à un ajustement affine, mais comme le résultat ne lui semble pas satisfaisant, il décide d'utiliser un changement de variable.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant dans lequel ln m_i désigne le logarithme népérien de m_i.

t_i (en heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln m_i$	- 0,51								

2. Représenter le nuage de points M_i de coordonnées $(t_i\,,\,y_i)$ dans un repère orthogonal. Unités graphiques : 2 cm pour 1 heure en abscisses, 1 cm pour 0,1 en ordonnées.

3. Tracer la droite (D) passant par les points M_0 et M_8 d'abscisses respectives 0 et 8, et déterminer son équation sous la forme : $y = \mathrm{a}\,t + \mathrm{b}$.

On admet dans la suite de cette partie que cette droite donne une approximation satisfaisante du nuage de points M_i.

4. En déduire l'expression de m en fonction de t. Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$m(t) = 0{,}6\ \mathrm{e}^{0{,}12\,t} \qquad (1)$$

5. Déterminer à quel instant, selon ce modèle (1), la masse m de levure aura atteint trois grammes. On donnera le résultat en heures et minutes.

6. Quelqu'un affirme que, selon ce modèle, la masse de levure augmente chaque heure d'une même quantité. Est-ce exact ? On justifiera la réponse.

Partie B

Le deuxième étudiant se souvient que, dans des cas comparables qu'il a déjà rencontrés, la vitesse de croissance est proportionnelle à la quantité de matière qui se reproduit. Il cherche donc une fonction solution de l'équation différentielle :

$$m'(t) = \mathrm{c}\, m(t)$$

où c un nombre réel.

1.
   a) Donner les solutions de l'équation différentielle ci-dessus.

   b) Déterminer, parmi les solutions précédentes, la solution $m(t)$ qui vérifie les conditions $m(0) = 0{,}60$ et $m(8) = 1{,}57$.

2. On admet que la fonction ainsi obtenue peut s'écrire (après arrondi) :

$$m(t) = 0{,}6\, e^{0{,}12\, t} \qquad (2)$$

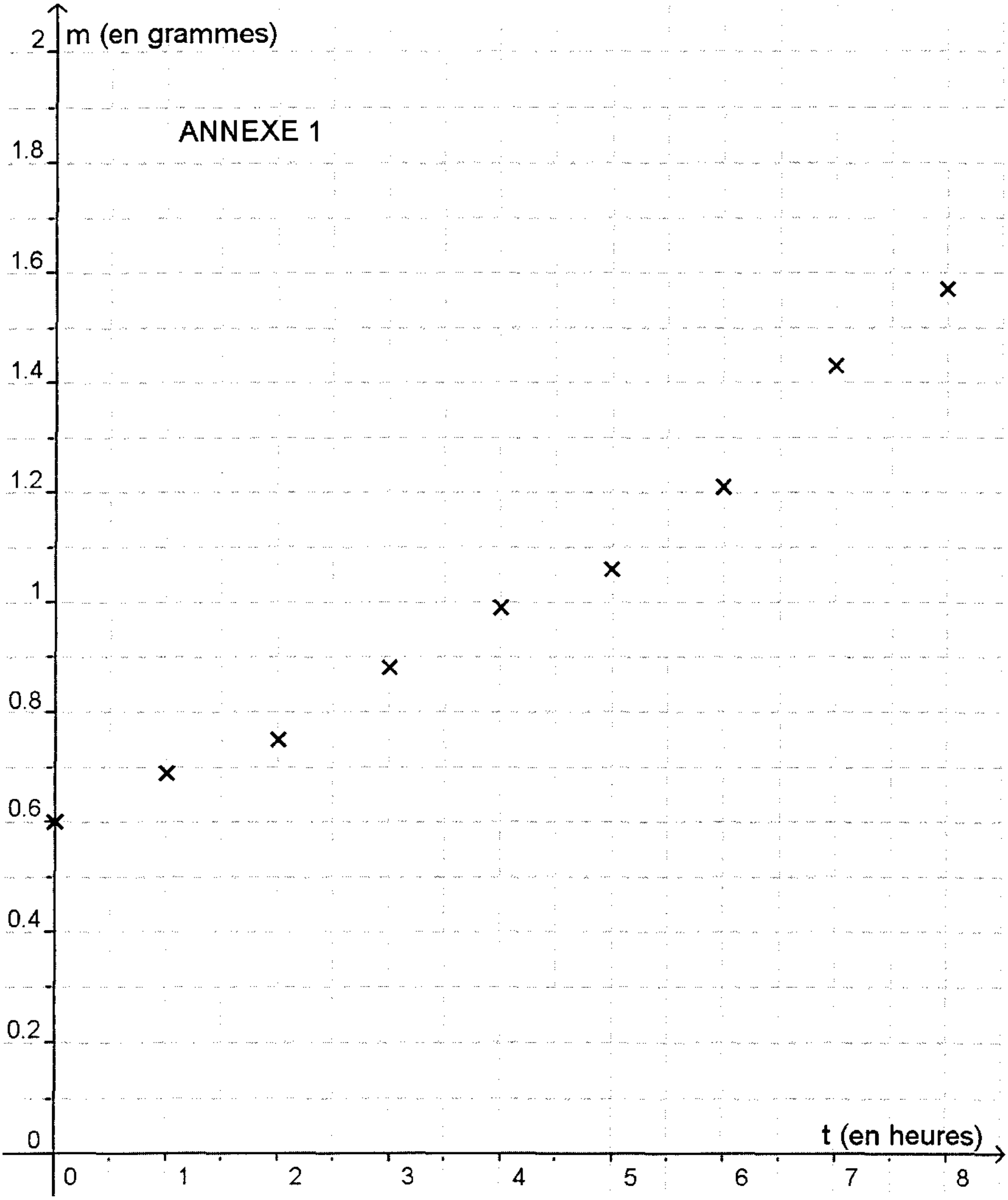
   a) Calculer $m'(t)$. En déduire le sens de variation de m lorsque t varie de 0 à 8.

   b) Tracer la courbe (C) obtenue avec ce modèle (2) sur le graphique de l'annexe. Tracer la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 et expliquer comment elle a été tracée.

   c) Sachant que $m'(t)$ représente la vitesse instantanée (en g/h) d'augmentation de la masse, calculer la vitesse à l'instant 0.

À RENDRE AVEC LA COPIE D'EXAMEN

Évolution de la masse de levure en fonction du temps



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad ; \quad V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i \; ; V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2-(\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\overline{A})=1-P(A) \quad ; \quad P(\Omega)=1 \quad ; \quad P(\varnothing)=0$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1}=u_n+a$; $u_n=u_0+na$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$