BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2010

SUJET SORTI

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 (8 points)

Questionnaire à choix multiple :

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie la référence de chaque question, suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Dans un jeu de 32 cartes, on en tire une au hasard. La probabilité d'obtenir un valet **ou** un pique est :

   a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{11}{32}$

2. La fonction f définie sur $[-4\ ,\ 0]$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{2-3x}$ a pour fonction dérivée la fonction $f\,'$ définie par :

   a) $f\,'(x)=-\dfrac{4}{(2-3x)^2}$ b) $f\,'(x)=\dfrac{8-6x}{(2-3x)^2}$ c) $f\,'(x)=\dfrac{4}{(3x-2)^2}$

3. On considère la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 12]$ par $f(x)=\ln(x+0,5)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0,5 est :

   a) $y=x+0,5$ b) $y=x-0,5$ c) $y=-x+0,5$

4. Soit (D) la droite passant par les points A(5 ; 30) et B(7 ; 50). Le coefficient directeur de (D) est :

   a) 10 b) 20 c) 0,1

5. Une population de bactéries augmente de 20% toutes les demi-heures. Initialement, la population est de 10 milliers de bactéries. Au bout de six heures, la population est environ :

   a) 72 milliers de bactéries b) 89 milliers de bactéries c) 144 milliers de bactéries

6. Le comité d'entreprise d'un grand magasin veut organiser un voyage pour son personnel.

   Il envoie donc un questionnaire aux employés pour connaître leurs préférences, reçoit 400 réponses et construit le tableau suivant :

	À l'hôtel	En club	En croisière	Total
En France	14	26	20	60
À l'étranger	266	34	40	340
Total	280	60	60	400

A. On choisit un employé au hasard : la probabilité que cet employé préfère un séjour à l'hôtel est :

a) 0,28 b) 0,7 c) 0,35

B. On choisit un employé au hasard : la probabilité que cet employé ne souhaite pas partir en club est :

a) 0,65 b) 0,75 c) 0,85

C. On choisit un employé au hasard parmi ceux qui ont décidé de partir à l'étranger. La probabilité qu'il préfère un séjour en club est :

a) 0,3 b) 0,1 c) 0,85

EXERCICE 2 (12 points)

Partie A

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,046y,$$

où y est une fonction de la variable réelle t dérivable sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'équation (E).

2. Une contamination accidentelle des aliments dans un élevage de porcs a provoqué une intoxication aigüe chez les animaux. On étudie alors l'élimination de la toxine incriminée chez un porc prélevé dans le cheptel. On sait que la concentration de la toxine dans le sang varie en fonction du temps t suivant la relation :

$$f(t) = Ce^{-0,046t},$$

où $f(t)$ est la concentration exprimée en µg/L, à l'instant t exprimé en jours.

a) Sachant que cinq jours après l'intoxication la concentration est de 23,8µg/L, déterminer la constante C (on arrondira le résultat à l'unité).

b) Déterminer alors la concentration initiale de la toxine dans le sang de l'animal.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(t) = 30e^{-0.046t}.$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2. En déduire l'existence d'une asymptote (que l'on précisera) à la courbe (C).

3. Pour tout nombre positif t, calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0,+\infty[$.

4. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

5. On considère un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm pour 2 jours en abscisses et 1 cm pour 2 µg/L en ordonnées.

   a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 10^{-1} près) :

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$						

   Placer dans le repère les points correspondants.

   b) Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} près du coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 15. Tracer alors cette tangente dans le repère précédent.

   c) Construire la courbe (C) dans le même repère.

Partie C

On admet que la fonction f étudiée dans la partie B modélise de façon satisfaisante la concentration de la toxine dans le sang de l'animal étudié.

1. a) Déterminer par le calcul la concentration mesurée une semaine après l'intoxication. On arrondira le résultat à l'unité.

   b) Vérifier graphiquement le résultat précédent, en faisant apparaître les traits de construction utiles sur le graphique de la partie B.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

   On considère que la toxine n'est plus dangereuse pour le porc lorsque sa concentration atteint 10 % de la valeur initiale.

   Déterminer le nombre de jours nécessaires pour annoncer que le porc est hors de danger.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; \; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme $u_0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\ ,\ b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$