BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2008

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

<u>EXERCICE n°1</u> (*8 points*)

Les 32 élèves d'une classe de lycée doivent traiter un exercice de probabilités. Pour organiser les données, ils disposent de deux méthodes : un tableau ou un schéma. Trois quarts d'entre eux utilisent un tableau et parmi ceux-ci 12,5 % ont fait une erreur. Tous les autres ont fait un schéma et 1 seul d'entre eux a fait une erreur.

1. Reproduire en le complétant le tableau ci-dessous afin de faire la synthèse de ces données :

choix / bilan	tableau	schéma	total
avec erreur		1	
sans erreur			
total			32

2. On choisit dans cette classe un élève au hasard. On note T l'événement : « l'élève a utilisé un tableau » et on note E l'événement : « l'élève a fait une erreur » ; $\overline{T}$ et $\overline{E}$ désignent les événements contraires respectifs de T et E.
   a) Exprimer $\overline{T}$ à l'aide d'une phrase affirmative (sans négation).
   b) Exprimer par une phrase les événements suivants :
   $T\cap E$, $T\cup E$, $T\cap\overline{E}$, $\overline{T}\cap\overline{E}$.
   c) Calculer la probabilité des quatre événements de la question b) (*on donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible*).

3. Quel est, dans cette classe, le pourcentage d'élèves ayant réussi l'exercice sans erreur ?

<u>EXERCICE n° 2</u> (*12 points*)

Partie A

Sur la page annexe, on a représenté, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie sur $D = [0\ ,+\infty[$.
Cette courbe passe par le point $A(0\ ;\ -2)$. On note B le point de coordonnées $(3\ ;-0{,}5)$.
Les questions 1 à 3 doivent être traitées par lecture graphique.

1. Donner la valeur de $f(0)$.
2. Donner un encadrement d'une solution de l'équation $f(x)=0$ d'amplitude 0,25 (*on ne demande pas de justifier l'encadrement*).
3. Résoudre l'inéquation $f(x)\leq -1$. Laisser les traits de construction.
4. Déterminer une équation de la droite (AB).
5. On admet que la droite (AB) est tangente à C en A. Que vaut $f'(0)$?

Partie B

Dans toute la suite de l'exercice on considère la fonction f définie sur l'intervalle $D = [0\,, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 3 + \frac{2}{e^x + 1}.$$

1. Calculer $f(0)$.

2. a) Calculer $f'(x)$.

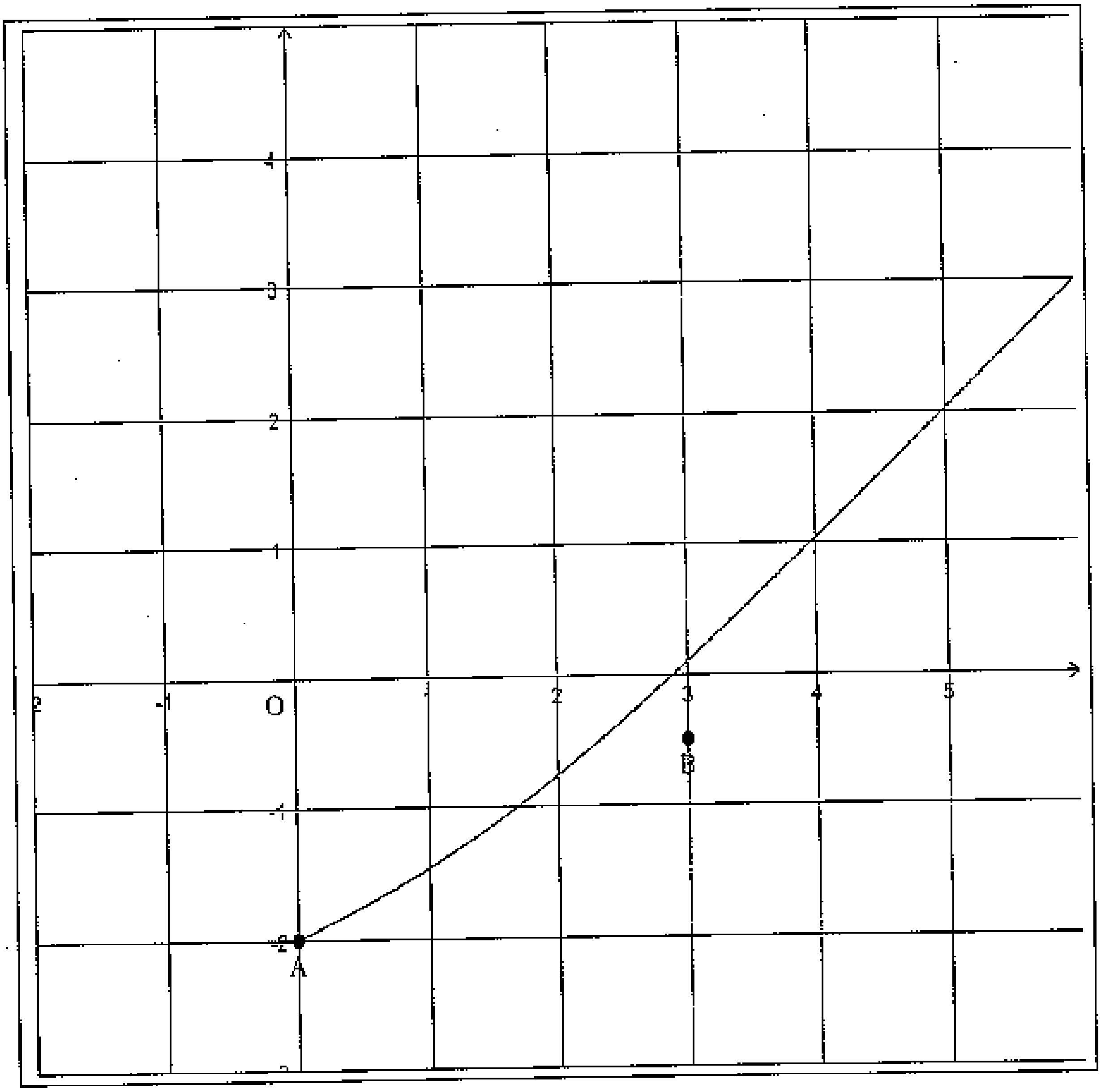
   b) En déduire $f'(0)$.
   Donner l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal au point A d'abscisse 0.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle D, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans D.

5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Annexe (EXERCICE 2)



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; \; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. CALCUL INTÉGRAL

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$