BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2009

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures   Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 (11 points)

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

On a relevé à un moment donné le taux de cholestérol (exprimé en grammes par litre de sang) et l'âge (exprimé en année) d'un échantillon de la population d'une région.

Les résultats sont consignés dans le tableau d'effectifs à double entrée ci-dessous.
On peut lire, par exemple, que dans l'échantillon considéré il y a 8 individus entre 50 et 60 ans qui ont un taux de cholestérol compris entre 2,0 et 2,2 g/l.

âge / taux	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[	70 et plus	Totaux
[1,6 ; 1,8[	23	15	12	9	5	4	68
[1,8 ; 2,0[	14	13	11	9	7	5	59
[2,0 ; 2,2[	4	9	7	8	10	7	45
[2,2 ; 2,4[	0	3	5	5	8	9	30
[2,4 ; 2,6[	1	2	3	3	4	5	18
Totaux	42	42	38	34	34	30	220

Partie A

1. Calculer le taux moyen de cholestérol, arrondi à 10^{-2} près, des individus de la classe d'âge [20, 30[.
2. On affirme que plus de 60% des individus de l'échantillon ont un taux de cholestérol appartenant à l'intervalle [1,8 ; 2,4 [. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Partie B

On s'intéresse maintenant à un nouveau tableau dans lequel figure le taux moyen de cholestérol par tranche d'âge (on a remplacé les intervalles par leur centre).

Âge	25	35	45	55	65	75
Taux moyen	1,82	1,93	1,98	2,01	2,09	2,14

1. Représenter par un nuage de points cette nouvelle série statistique.
   On utilisera un repère orthogonal dans lequel les âges seront portés en abscisses (unité : 2 cm pour 10 ans) et le taux de cholestérol en ordonnées (unité graphique 5 cm).

2. a) On appelle G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers.
   Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.
   Dans la suite de cette partie, on admet que cette droite donne une approximation satisfaisante de l'évolution du taux moyen de cholestérol en fonction de l'âge.

   b) Déterminer graphiquement en faisant apparaître les constructions utiles, une valeur approchée du taux moyen de cholestérol d'un individu de 51 ans.

3. Déterminer l'équation de la droite $(G_1 G_2)$ sous la forme $y = m\,x + p$ (on donnera m à 10^{-4} près et p à 10^{-2} près). Retrouver par le calcul le résultat de la question 2.b).

Partie C

Une des 220 personnes de l'échantillon se présente pour prendre connaissance de son taux de cholestérol. On suppose, pour une raison ou une autre, qu'il est impossible de deviner son âge et encore moins de deviner son taux de cholestérol.

1. Déterminer la probabilité que son taux de cholestérol soit inférieur strictement à 2,2 g/l.

2. Déterminer la probabilité que son âge, au moment des relevés, soit dans la tranche [30, 50 [.

(On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.)

<u>EXERCICE 2</u> (9 points)

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placées dans une boîte de Petri. Le nombre de bactéries **en centaines** est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1. a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

   b) Montrer que $f(t) = 4 + \dfrac{-9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. On appellera cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe représentative (C) de f ?

   c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier votre réponse.

2. a) Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \dfrac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$.

   b) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$, puis le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

3. Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Déterminer l'équation de (T).

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près :

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$		2,09						

5. Tracer, dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm, la droite (T), la courbe (C) ainsi qu'en les précisant la (ou les) asymptote(s) éventuelles(s) à (C).

6. Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200.

7. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation. *(Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.)*

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; \; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme $u_0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$