BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2010

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures

Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 (8 points)

Une enquête est effectuée dans un établissement de 1250 élèves afin de connaître leur groupe sanguin.

- Aucun élève n'est du groupe sanguin AB.
- Il y a 650 garçons, et 66 % d'entre eux sont du groupe A.
- 42 % des élèves sont du groupe O et parmi ceux-là, il y a deux fois plus de filles que de garçons.
- Il y a 12 filles du groupe B.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	A	B	O	Total
Garçons				
Filles				
Total				1250

2. On choisit au hasard un des élèves parmi les 1250 élèves de l'établissement.

   a) Montrer que la probabilité de l'événement F : « l'élève choisi est une fille » est égale à 0,48.

   b) Calculer la probabilité de l'événement H : « l'élève choisi est du groupe A ». Le résultat sera arrondi à 0,01 près.

   c) Définir par une phrase les événements $F \cap H$, $F \cup H$, $\overline{F} \cap \overline{H}$ puis calculer chacune de leur probabilité. Les résultats seront arrondis à 0,01 près.

3. <u>On choisit au hasard un élève du groupe B.</u>
   Calculer alors la probabilité de l'événement G : « l'élève choisi est un garçon ».
   Le résultat sera arrondi à 0,01 près.

EXERCICE 2 (12 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 , 8] par :

$$f(t) = 14 - t - 10e^{-0,8t}.$$

1. Vérifier que la fonction dérivée f' de f vérifie pour tout réel t de l'intervalle [0 , 8] :
$$f'(t) = -1 + 8e^{-0,8t}.$$

2. Résoudre l'équation :
$$-1 + 8e^{-0,8t} = 0.$$
Donner la valeur exacte t_0 de la solution de cette équation, puis une valeur arrondie au dixième.

3. Résoudre sur l'intervalle [0 , 8] l'inéquation :
$$-1 + 8e^{-0,8t} > 0.$$
En déduire le signe de la dérivée de la fonction f sur cet intervalle et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction f, au point d'abscisse 0.

5. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 0,01 près) :

t	0	1	2	2,6	3	4	5	6	7	8
$f(t)$						9,59				5,98

6. Dans un repère orthogonal, en prenant 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, construire les tangentes aux points d'abscisses 0 et t_0, ainsi que la courbe (C).

Partie B

On injecte une substance médicamenteuse dans le sang d'une personne et on surveille le taux de cette substance pendant 8 heures.
On considère que le taux de cette substance (en $mg.l^{-1}$) en fonction du temps t (en heures) est modélisé par la fonction f définie dans la partie A.

1. À quel instant t ce taux est-il maximum ? Exprimer cet instant en heures et minutes en utilisant la valeur approchée obtenue dans la partie A.
Quelle est alors la valeur du taux maximum de cette substance dans le sang du patient?

2. Pour les deux questions suivantes, on fera apparaître les traits de construction utiles et les résultats seront arrondis à la demi-heure près.
    a) Déterminer graphiquement l'instant t où le taux redevient inférieur à 8,5 $mg.l^{-1}$.
    b) On considère que cette substance est active lorsque le taux est supérieur à 7 $mg.l^{-1}$.
    Déterminer graphiquement la durée pendant laquelle cette substance est active.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$