La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée
Le formulaire officiel est autorisé

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré

SUJET SORTI

Exercice I : 4 points

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher.
Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

Un joueur mise 4 euros, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en euros) inscrit sur la boule.

1. Le joueur effectue un tirage.
On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 euros) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 euros).
Calculer p_1 et p_2.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd).

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b) Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

c) Calculer son espérance mathématique E(X).

3. Un jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0.
On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1.
Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

<u>Exercice II</u> : 6 points

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique 1 cm).
On considère un polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$ où z est une variable complexe.

1. **a)** Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i \text{ et } z_B = 2 + 2i$$

a) Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_A et z_B.

b) Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A et B.

c) Quelle est la nature du triangle OAB ?

3. On considère la transformation T du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Caractériser géométriquement la transformation T.

b) Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par la transformation T.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Problème : 10 points

On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.(unité graphique 2 cm).

PARTIE A :

1. **a)** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b) Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a)** Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Étude de la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$

   a) Montrer que pour tout réel x on a :

   $$f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\cdot g(x) \text{ avec } g(x)=x+1-e^{x}$$

   b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

   c) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

   d) En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$.

   e) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$

5. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous,
   tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.
   Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4	6
$f(x)$										

PARTIE B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Calculer l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x=3$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

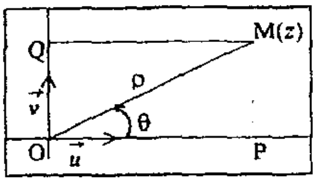
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

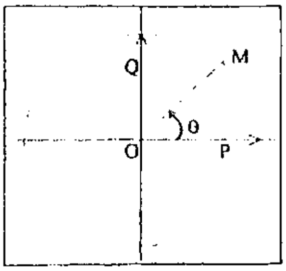
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES **STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels**)

Si $k > 1$, $\lim_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)'=u'+v'$

$(ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$

$(e^u)'=e^u u'$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt\leqslant\int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$