

SUJET SORTI

Session 2008

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE (STL)
Option Physique de Laboratoire et de Procédés Industriels

MATHÉMATIQUES - Écrit -

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée
Le formulaire officiel est autorisé

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 y compris la page de présentation.
Deux ANNEXES (papier millimétré).
Assurez-vous qu'il est complet ; s'il est incomplet,
veuillez le signaler au surveillant de la salle qui vous en remettra un autre exemplaire.

EXERCICE 1 (5 points)

On note i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm).

- 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :
(les solutions seront données sous forme algébrique)

$$(1) \quad z^2 - 10z + 50 = 0$$

$$(2) \quad z + 2 = i\sqrt{3}z - 6$$

- 2) a) Soit A le point d'affixe $z_A = 5 - 5i$.

Déterminer le module, un argument et la notation exponentielle de z_A .

- b) Soit B le point d'affixe z_B , z_B étant le nombre complexe conjugué de z_A .

Déterminer la notation exponentielle de z_B , puis celle de $\frac{z_B}{z_A}$.

En déduire que B est l'image de A par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
Construire le triangle OAB dans le repère donné et indiquer sa nature.

- c) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 - 2i\sqrt{3}$.

Montrer que l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point D,

d'affixe $z_D = -2\sqrt{3} + 2i$.

Calculer la distance OC et construire avec précision le triangle OCD.

- d) Soit K le milieu de [AC].

Calculer les affixes des vecteurs \overrightarrow{OK} et \overrightarrow{DB} puis montrer que les droites (DB) et (OK) sont perpendiculaires.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE			
COEFF : 4	SESSION 2008	DURÉE : 4 HEURES	OPTIONS : TOUTES
PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
CODE : 8MAPLME1			PAGE 2/6

EXERCICE 2 (4 points)

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{9\pi^2}{16}y = 0 \quad (\text{E})$$

1. Donner la solution générale de (E).
2. Déterminer la solution particulière, notée f , de (E) telle que $f(4) = -\sqrt{3}$ et $f'\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3\pi}{4}$.
3. Vérifier que f s'écrit sous la forme : $f(x) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Montrer que f est périodique de période $\frac{8}{3}$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{8}{3}\right]$.

PROBLEME (11 points)

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

\ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note E le point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction définie sur \mathbf{R} par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

1. Calculer la dérivée de g .
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE :			
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE			
COEFF : 4	SESSION 2008	DURÉE : 4 HEURES	OPTIONS : TOUTES
PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
CODE : 8MAPLME1			PAGE 3/6

Partie B

On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a :

$$f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

2. En utilisant l'une des formes de $f(x)$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Montrer que les droites \mathcal{G}_1 d'équation $y = x - 2$ et \mathcal{G}_2 d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative \mathcal{C} de f .

3. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)^2$.

4. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .

5. Construire la courbe \mathcal{C} , sa tangente en E et ses asymptotes.

Partie C

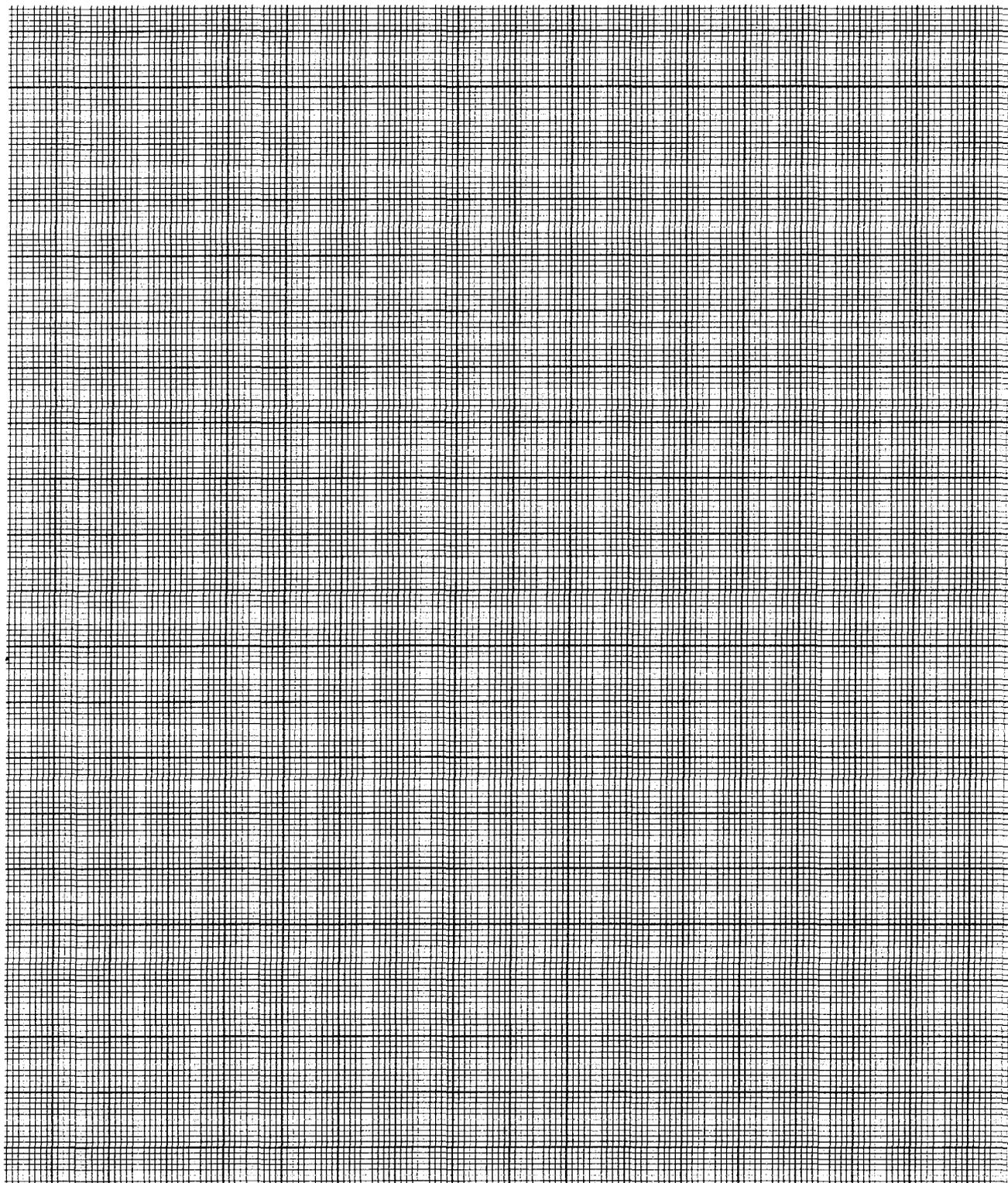
1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$.

2. En déduire une primitive de f .

3. Déterminer en cm^2 , en valeur exacte puis au mm^2 près, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

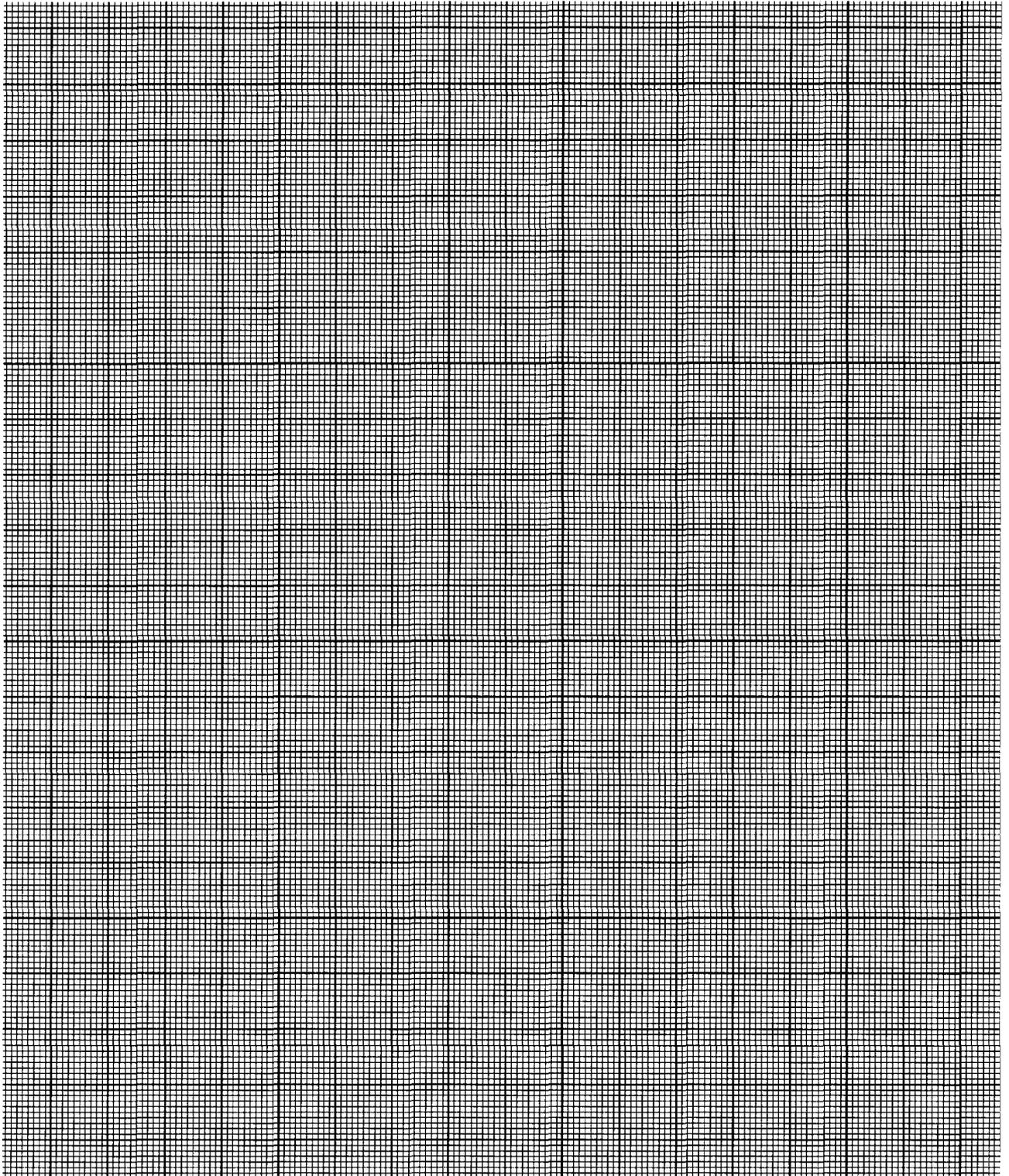
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE			
COEFF : 4	SESSION 2008	DURÉE : 4 HEURES	OPTIONS : TOUTES
PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
CODE : 8MAPLME1			PAGE 4/6

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)



BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE			
COEFF : 4	SESSION 2008	DURÉE : 4 HEURES	OPTIONS : TOUTES
PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
CODE : 8MAPLME1			PAGE 5/6

ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)



BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE :			
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE			
COEFF : 4	SESSION 2008	DURÉE : 4 HEURES	OPTIONS : TOUTES
PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
CODE : 8MAPLME1			PAGE 6/6