Session 2009

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE (STL)

Option Physique de Laboratoire et de Procédés Industriels

MATHÉMATIQUES - Écrit -

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le formulaire officiel est autorisé.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction. la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Une feuille de papier millimétré est fournie avec le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de1/4 à 4/4 y compris la page de présentation.
Assurez-vous qu'il est complet : s'il est incomplet,
Veuillez le signaler au surveillant de la salle qui vous en remettra un autre exemplaire.

EXERCICE 1 (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable x et y' sa dérivée.

1) Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.

2) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie dans **R** par , $g(x) = ax + b$, soit solution de l'équation (E).

3) a) Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = k\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 2.$$

Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

b) Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.

4) Dans cette question, on prend $k = 2$.

a) Calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

b) Donner une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique est égale à 4 cm.

1) a) Résoudre dans **C**, l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

b) On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Soit A le point du plan d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2.

Placer les points A et B dans le plan complexe et démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3) Soit E le point d'affixe $z_3 = e^{-i\pi/3}$ et F d'affixe $z_4 = e^{i\pi/6}$.

a) F est l'image de E par une transformation du plan.

Donner la nature de cette transformation et ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que F est le milieu du segment [OB].

4) Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\,\vec{v}$.

a) Placer les points D, E et F sur la figure.

b) Déterminer l'affixe de D.

c) Montrer que OD = DB.

d) Qu'en déduire pour la droite (AD) ? *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

PROBLÈME (11 POINTS)

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5\ln x$.

On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1) Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction g (*l'étude des limites n'est pas demandée*).

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1\,;5]$. On note α cette solution.

b) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.

3) Étudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-5)\ln x}{x}$

On peut donc aussi écrire : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x-5)\ln x$ ou encore $f(x) = \ln x - \dfrac{5\ln x}{x}$

1) a) Déterminer la limite de f en 0.

Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) a) Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

a) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$, tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.

b) Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C

1) Soit F la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $F(x) = x\ln x - x - \dfrac{5}{2}(\ln x)^2$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.

2) a) Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

b) Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm^2 de l'aire de ce domaine.

c) Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire de ce domaine.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités),
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

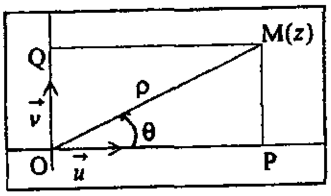
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

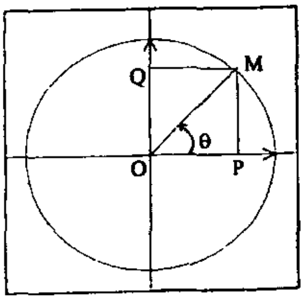
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)\ ;\ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$