BAC TECHNOLOGIQUE

SUJET SORTI **Session 2010**

MATHÉMATIQUES

Série Sciences et Technologies de Laboratoire (STL)

Option : Physique de Laboratoire
et de Procédés Industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
(Circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)

Le sujet est composé de deux exercices indépendants et d'un problème.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le formulaire officiel et deux feuilles de papier millimétré sont distribués avec le sujet.

EXERCICE 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct.
L'unité graphique est égale à 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$
2. On considère les points du plan A et B d'affixes respectives :
$$z_A = 2 - 2i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_B = 2 + 2i\sqrt{3}.$$
Déterminer le module et un argument des nombres z_A etz_B .
3. (a) Soit le point C d'affixe $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$.
Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
   (b) Construire le cercle $\mathscr{C}$ et les points A, B, C. (On laissera apparaitre les traits de construction)
4. Soit le point D d'affixe $z_D = 4i$. Montrer que le point D a pour image le point C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
5. Montrer que le point E, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$, appartient au cercle $\mathscr{C}$. Placer le point E sur le graphique.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme de fraction.
Une urne contient des boules de couleur numérotées.
- Une boule blanche numérotée ①, que l'on notera B1,
- Deux boules rouges numérotées ② et ③, que l'on notera R2 et R3
- Trois boules vertes numérotées ①, ② et ③, que l'on notera V1, V2 et V3.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait une boule de l'urne, puis une deuxième, sans avoir remis la première dans l'urne.
On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage, et le second celle obtenue au second tirage.
Par exemple (R2 ; V3) est un résultat ; il signifie que la première boule est rouge numérotée ② et que la deuxième boule est verte numérotée ③.
Pour répondre aux questions posées, on pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.
   (a) Déterminer le nombre de résultats possibles.
   (b) On admet que tous les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Les deux boules sont de la même couleur. »
   B : « Le produit des numéros inscrits sur les boules est 6. »
   C : « Il y a au moins une boule blanche. »

2. Un jeu consiste à tirer 2 boules de l'urne, selon la méthode décrite dans la question **1.**
   On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat, le produit des numéros inscrits sur les deux boules.
   Exemple : On associe au tirage (B1 ; V2) le nombre 2 car $1 \times 2 = 2$.

   (a) Donner toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

   (b) Montrer que la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 9 est égale à $\dfrac{1}{15}$.

   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

   (d) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME (11 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x.$$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. À l'aide du tableau de signes de la fonction g' sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, indiquer les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.

.

Partie B : Étude d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}.$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction dérivée f' de la fonction f est définie par :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}.$$

   En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif .
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ une solution unique notée α.
   (b) Donner, en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,01 du nombre réel α .
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
   (a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

(b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un point B d'abscisse $e^{\frac{1}{2}}$.

(c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;

6. Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm) les droites T et $\mathscr{D}$, ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE C : calcul d'une aire

1. Hachurer sur le graphique la partie E du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = e^{\frac{1}{2}}$ et $x = e$.

2. (a) Montrer que la fonction H définie par $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   (c) Montrer que la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée E est, en unités d'aire,
   $$\mathscr{A} = \frac{2e^2 + 6e - 8e^{\frac{1}{2}} + 1}{8}.$$
   En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F108,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

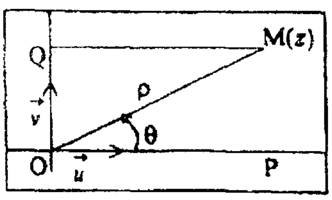
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho \cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho \sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

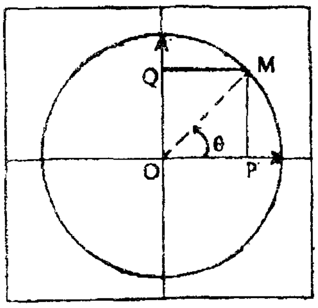
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \; ; \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\dfrac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. *Fonctions*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$, si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* **(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)**

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u **à valeurs strictement positives**

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2 y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$