La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le formulaire officiel est autorisé.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : (12 points)

Le nombre d'objets produits et vendus chaque jour par une entreprise est noté x. Le bénéfice, en euros, qu'elle en retire est donné par la formule suivante :

$$-x^2 + 90x - 1\,400.$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $f(x) = -x^2 + 90x - 1\,400$.

PARTIE A : *Étude du bénéfice.*

1. Vérifier que $f(x) = (x-20)(70-x)$
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ dans l'intervalle [0 ; 100].
3. En déduire la quantité d'objets à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
4. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 100].
6. En déduire la quantité d'objets à produire pour obtenir un bénéfice maximum. Préciser la valeur du bénéfice correspondant.

PARTIE B : *Étude du coût total de production.*

1. Chaque objet est vendu 120 euros. On désigne par $R(x)$ la recette réalisée par la vente de x objets. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. On appelle $C(x)$ le coût total de fabrication de x objets.
   Vérifier que : $C(x) = x^2 + 30x + 1400$.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$C(x)$	1 400	1 800	2 400					8 400	10 200	12 200	14 400

4. Sur un graphique, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction C. (Prendre 1cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 1 000 unités sur l'axe des ordonnées.) Tracer également la droite Δ_{120} représentative de la recette R.

5. Indiquer sur le graphique la quantité d'objets à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice (on fera apparaître les traits de construction nécessaires à la lecture).

PARTIE C : *Détermination du prix minimum de vente de chaque objet.*

On rappelle que le coût total de fabrication de x objets est donné par : $C(x) = x^2 + 30x + 1400$. L'entrepreneur cherche à diminuer le prix de vente de chaque objet, initialement fixé à 120 euros.

1. On suppose que l'entrepreneur baisse ce prix à 80 euros.

a) Quelle est alors l'équation de la droite, nommée Δ_{80}, correspondant à la recette de x objets vendus ?

b) Construire cette droite sur le même graphique que celui de la **PARTIE B** question **4.**.

c) Dans ces conditions, l'entrepreneur peut-il espérer réaliser un bénéfice ? Justifier.

2. Soit Δ_{min} la droite qui permet d'obtenir le prix de vente unitaire minimal sans que l'entreprise soit déficitaire.
Construire Δ_{min} sur le graphique précédent.

EXERCICE 2 : (8 points)

Le 01/01/2006, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule A, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule B, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2006 est de 1 200 euros. On note u_n (resp. v_n) le salaire annuel selon la formule A (resp. B) durant l'année 2006 + n.

1. Expliquer pourquoi, en 2006, on a : $u_0 = v_0 = 14400$.

2. Expliquer pourquoi, en 2007, on a : $u_1 = 14640$; $v_1 = 14616$.

3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.

4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

5. Calculer et comparer les deux formules en 2016 puis en 2026. (Arrondir les résultats au centime d'euro).

6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière.
   On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :
   $$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \text{ et } T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n .$$

   Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules A et B.

BACCALAURÉAT, SÉRIE STT

SPÉCIALITÉS action et communication administratives
action et communication commerciales

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$

$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^{x+y} = a^x a^y$

IV. ANALYSE

A. *DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES*

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

B. *OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES*

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$