BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIE SCIENCES ET TECHNOLOGIES TERTIAIRES

SPÉCIALITÉS : COMPTABILITÉ et GESTION – INFORMATIQUE et GESTION

SESSION 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 3 heures – Coefficient 4

Le sujet comporte 4 pages.
Deux feuilles de papier millimétré, qui seront utilisées dans l'exercice 2 et le problème, seront remises au candidat avec le sujet.

L'usage des calculatrices est autorisé (circulaire n°99-186 du 16-11-1999).
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Un traiteur prépare des gâteaux pour une réception de 300 personnes. Il propose des tartelettes, des charlottes et des macarons, chacun pouvant être au chocolat ou à la framboise.

Sur les 300 gâteaux :

- 100 sont des charlottes, dont le quart au chocolat,
- 40% sont des tartelettes, dont les deux cinquièmes sont au chocolat,
- trois huitièmes des macarons sont à la framboise.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Chocolat	Framboise	Total
Tartelettes			
Charlottes			
Macarons			
Total			300

2. Un invité choisit un gâteau au hasard.
L'événement « le gâteau est à la framboise » est noté A.
L'événement « le gâteau est un macaron » est noté B.

On donnera les résultats demandés sous forme décimale, arrondie au centième.

a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
b) Exprimer par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$, puis calculer leurs probabilités.
Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
c) L'invité en question n'aime pas le chocolat.
Sachant qu'il va choisir un gâteau à la framboise, quelle est la probabilité que ce soit une tartelette ?

EXERCICE 2 (5 points)

Le tableau suivant donne l'évolution en fonction de l'année du budget publicitaire d'une entreprise, en dizaines de milliers d'euros.

Années	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Budget y_i	2	2,3	2,5	3	3,2	3,5	3,7	4,2

1. Dans un repère d'unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à cette série statistique (on prendra la feuille verticalement et l'axe des ordonnées sera placé sur le bord gauche du quadrillage).

2. Soit G_1 le point moyen associé aux quatre premiers points du nuage.
   Soit G_2 le point moyen associé aux quatre derniers points du nuage.
   Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2.

3. a) Placer G_1 et G_2 sur le dessin et tracer la droite (G_1G_2).
   b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

4. On considère que cette droite permet un ajustement de cette série statistique.
   a) Estimer à l'aide du graphique, le budget à prévoir pour l'année 2007 (faire apparaître les pointillés sur le graphique).
   b) Calculer à partir de quelle année le budget devrait dépasser 60 000 euros.

PROBLÈME (10 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax + b + e^{-x}$, a et b étant deux réels. On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout réel x.

2. Sachant que la courbe C passe par le point A $(-1\,;\,e-5)$ et que $f'(0) = 2$, vérifier que :

$$f(x) = 3x - 2 + e^{-x}, \text{ pour tout réel } x.$$

Dans la suite du problème, on utilisera cette expression de $f(x)$.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

5. On note f' la dérivée de f. Montrer que $f'(x) = 3 - e^{-x}$ et étudier son signe.

6. Dresser le tableau de variation de f.

7. a) Compléter le tableau suivant, les valeurs étant arrondies au dixième.

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	1	2	3
$f(x)$								

   b) Tracer C et Δ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, en prenant comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On indiquera la tangente horizontale à la courbe C.

8. a) Déterminer une primitive F de f sur **R**.

   b) Calculer $I = \int_1^2 f(x)dx$. Donner la valeur exacte puis l'arrondi au centième.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique
STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \ ; \ V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ ; \ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL (SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$