BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES TERTIAIRES

Spécialités : Comptabilité et Gestion – Informatique et Gestion.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 4.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire de Mathématiques est joint au sujet.

Ce sujet nécessite 1 feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 **(5 points)**

Tous les ans, lors de la journée du Patrimoine, un musée d'art contemporain accueille gratuitement les visiteurs. On note dans le tableau suivant l'évolution du nombre de visiteurs depuis 6 ans.

1^{er} Tableau

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004
x_i : rang de l'année	1	2	3	4	5	6
v_i : nombre de visiteurs	164	270	330	493	545	812

Au vu de la forme du nuage de points associé à la série statistique (x_i ; v_i), l'ajustement linéaire ne semble pas judicieux.
On décide de poser $y_i = \ln(v_i)$ pour chaque valeur de i. On obtient le tableau suivant :

2^e Tableau

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004
x_i : rang de l'année	1	2	3	4	5	6
y_i : $y_i = \ln(v_i)$	5,1	5,6	5,8	6,2	6,3	6,7

1) Dans un repère orthogonal, représenter le nuage des points M_i (x_i ; y_i) issus du 2^e tableau, où :
   . 2 cm représentent une année sur l'axe des abscisses ;
   . 4 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées (commencer à graduer à partir de 5).

2) Soit G le point moyen du nuage. On considère la droite Δ d'équation $y = 0,3\,x + 4,9$ dans le repère.
   a) Calculer les coordonnées de G.
   b) Tracer la droite Δ.
   c) Montrer que la droite Δ passe par le point G ainsi que par certains points du nuage qu'on déterminera.

3) Le directeur désirerait avoir une estimation du nombre de visiteurs pour l'année 2005.
   On considère que la droite Δ réalise un ajustement affine du nuage de points issus du second tableau.
   a) A l'aide de l'équation de la droite Δ, calculer la valeur de y_i pour l'année 2005.
   Puis, vérifier graphiquement la valeur trouvée (faire apparaître les traits de construction).
   b) En déduire le nombre de visiteurs v_i estimé pour l'année 2005 arrondi au visiteur près.

EXERCICE 2 (5 points)

On dispose d'une urne contenant 3 boules indiscernables au toucher de couleur rouge, bleue et jaune et de 3 boîtes de couleur rouge, bleue et jaune.

La boîte rouge contient 1 ticket avec la mention « gain de 100 euros » et 3 tickets avec la mention « perdu ».

La boîte bleue contient 2 tickets avec le mention « gain de 20 euros », 1 ticket avec la mention « gain de 5 euros » et 1 ticket avec la mention « perdu ».

La boîte jaune contient 1 ticket avec la mention « gain de 15 euros », 1 ticket avec la mention « gain de 10 euros », 2 tickets avec la mention « gain de 1 euro ».

Tous les tickets sont indiscernables au toucher.

Un candidat choisit au hasard une boule dans l'urne puis il prend un ticket au hasard dans la boîte ayant la même couleur que la boule tirée. Il gagne la somme d'argent indiquée sur le ticket.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

2) On considère les événements suivants :

A : « le candidat a gagné 100 euros ».
B : « le candidat a pris un ticket dans la boîte jaune ».
C : « le candidat a gagné une somme supérieure à 9 euros ».

Les résultats numériques des questions qui suivent seront donnés sous forme de fraction.

a) Calculer les probabilités p(A), p(B) et p(C).

b) Calculer la probabilité $p(C \cap B)$ puis la probabilité de $p(C \cup B)$.

c) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.

PROBLÈME (10 points)

L'objectif de ce problème est de mettre en œuvre les principales techniques d'analyse relatives aux études de fonctions étudiées dans la classe.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4 - x^2)\,e^{-0,5x}$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ est donnée en annexe.

Partie A : Étude graphique

En utilisant l'annexe, pour chacune des questions figurant dans le tableau ci-dessous, reporter sur la copie la lettre correspondant à la réponse exacte (aucune justification n'est demandée).

n°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	f est positive sur :	$]-2,1\,;-2] \cup [2\,;10[$	$[-2\,;2]$	$[0\,;5]$
2	$f'(0) =$	-2	2	$-0,5$
3	$f(0) =$	0	4	-2 et 2
4	Solution(s) de l'équation $f(x) = 0$	4	-2 et 2	aucune

Partie B : Étude de la fonction

1) Étude des limites

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) En utilisant le résultat : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{0,5x}}{x^2} = +\infty$, déterminer la limite de f en $+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Dérivée et tangente

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-0,5x}(0,5x^2 - 2x - 2)$.

b) Déterminer les racines x_1 et x_2 du trinôme $0,5x^2 - 2x - 2$.

c) Que peut-on dire des tangentes à la courbe aux points d'abscisse x_1 et x_2 ?

d) Tracer ces deux tangentes sur le document annexe.

3) Calcul d'aire

a) Pour tout réel x, on pose : $F(x) = (2x^2 + 8x + 8)\,e^{-0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer graphiquement le signe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

c) Mettre en évidence sur le graphique donné en annexe la partie $\mathscr{A}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées.

d) Calculer la mesure, en unité d'aires, de l'aire de $\mathscr{A}$.

ANNEXE PROBLÈME
À rendre obligatoirement avec la copie.

N°	QUESTION	RÉPONSE DU CANDIDAT (A, B OU C)
1	f est positive sur :	
2	$f'(0) =$	
3	$f(0) =$	
4	Solution(s) de l'équation $f(x) = 0$