L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve

Le formulaire officiel de mathématiques, prévu par l'arrêté du 27 mars 1991, est joint au sujet

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIE SCIENCES ET TECHNOLOGIES TERTIAIRES

SPÉCIALITES : COMPTABILITÉ et GESTION – INFORMATIQUE et GESTION

SESSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient 4

Ce sujet comporte 4 pages

1 feuille de papier millimétré sera fournie

EXERCICE 1 (5 points)

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

On répondra sur la copie par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes, en notant le numéro de la question.
On ne demande pas de justification.

Barème :
0,5 point par réponse juste et – 0,25 par réponse inexacte . En cas de total négatif, celui-ci est ramené à 0.

1. L'équation $(\ln x)^2 + \ln x = 4$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0 ; + \infty[$.

2. $\ln (2^2) + \ln \sqrt{2} - \ln 16 = -\frac{3}{2}\ln 2$.

3. L'inéquation $1 - \ln x \geq 0$ admet pour ensemble de solutions l'intervalle $[e; + \infty[$.

PARTIE B

A l'occasion de la naissance de leur petite-fille des grands-parents font un placement à intérêts composés sur un livret d'épargne. Le 1er janvier 2005 une somme de 3 000 euros est déposée. Le taux d'intérêt est de 2,5 % l'an.
Cette somme reste sur le livret d'épargne pendant de nombreuses années et on suppose que le taux d'intérêt reste fixe au cours des années.
On appelle C_0 le capital initial au 1er janvier 2005. Nous avons alors $C_0 = 3\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2. On arrondira C_2 au centime d'euros près.

2. Exprimer le capital C_n acquis le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$ en fonction de C_0 et de n.

3. Calculer au bout de combien d'années la petite fille disposera d'au moins 5 000 euros (On sera amené à résoudre une inéquation).

EXERCICE 2 (5 points)

Lors d'une course cycliste comportant deux étapes, 200 coureurs sont engagés au départ.
Dans ce peloton, 15 % des coureurs dont 10 Français ont moins de 25 ans et participent au classement du meilleur jeune. L'organisation constate que 80 % du peloton est formé de coureurs étrangers.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Jeunes coureurs de moins de 25 ans	Coureurs de 25 ans ou plus	Total
Coureurs français			
Coureurs étrangers			
Total			200

2. À l'arrivée de la course, le peloton est réduit à 147 unités dont 25 jeunes de moins de 25 ans.
Pour comparer les performances des jeunes coureurs par rapport à l'ensemble du peloton, calculer :

- Le taux en pourcentage des abandons des jeunes coureurs entre le départ de la première étape et l'arrivée de la course.
- Le taux en pourcentage des abandons des coureurs de 25 ans ou plus entre le départ de la première étape et l'arrivée de la course.

Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.
Conclure.

3. Dans le cadre de la lutte antidopage, un coureur est tiré au hasard à l'arrivée de la <u>première étape</u> pour passer un contrôle. Aucun abandon n'a été enregistré lors de la première étape.

a. Quelle est la probabilité que le coureur contrôlé soit :
Un jeune ? Un jeune Français ?

b. Calculer la probabilité que le coureur contrôlé soit un coureur étranger **ou** un coureur de 25 ans ou plus.

c. Le coureur contrôlé est tiré parmi les jeunes coureurs de moins de 25 ans.
Quelle est la probabilité que ce coureur soit français?

PROBLÈME (10 points)

Les parties **B** *et* **C** *peuvent être traitées de manière indépendante.*

PARTIE A

On étudie le taux d'équipement en micro-ordinateurs connectés à Internet des ménages français. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau ci – dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	0	1	2	3	4
Taux y_i en pourcentage	10	17	25	32	40

1. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) associé à cette série statistique. On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 10% sur l'axe des ordonnées. L'origine du repère sera prise dans le coin gauche de la feuille de papier millimétré.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points obtenu puis le placer sur le graphique. En raison de l'allure du nuage de points, nous décidons d'effectuer deux ajustements successifs en vue de faire des prévisions.

PARTIE B : ajustement affine.

On choisit pour ajustement affine du nuage de points la droite Δ d'équation $y = 7{,}4\,x + 10$.

1. Tracer la droite Δ dans le repère précédent.

2. Montrer par le calcul que le point moyen G appartient à la droite Δ.

3. *a.* Evaluer graphiquement, en faisant apparaître tous les tracés utiles, l'année à partir de laquelle au moins 75% des ménages seront équipés en micro-ordinateurs connectés à Internet.

   b. Retrouver ce résultat par le calcul, en utilisant l'équation de la droite Δ.

PARTIE C : ajustement logistique.

On choisit pour ajustement du nuage de points la courbe $\mathscr{C}$ représentant sur le graphique précédent la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10}{0{,}1 + \mathrm{e}^{-0{,}5\,x}}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$.

   a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^{-0{,}5x}}{\left(0{,}1 + \mathrm{e}^{-0{,}5x}\right)^2}$.

   b. Déterminer le signe de f' sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f.

3.*a.* Après l'avoir recopié, compléter le tableau de valeurs ci – dessous en donnant les valeurs arrondies à 0,1 près.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7
$f(x)$												

   b. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur le graphique précédent.

4.*a.* Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 75$.

   b. On rappelle que, pour x entier représentant le rang de l'année, $f(x)$ représente le taux en pourcentage d'équipement en micro – ordinateurs connectés à Internet des ménages français. Interpréter le résultat du **4.a.**

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

F12

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

STT , STL , F12

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* ***(SÉRIES F12, STT)***

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$

STT STI F12

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

STT, STL, F12